Содержание

1 Неделя 1

Паросочетания в двудольных графах

1. Дан ациклический ориентированный граф. Нужно покрыть все его вершины минимальным числом вершинно-непересекающихся путей.
2. Дан ациклический ориентированный граф. Нужно покрыть все его ребра минимальным числом реберно-непересекающихся путей.
3. Задача о минимальном реберном покрытии. Дан двудольный граф. Выберите минимальное число ребер так, чтобы любая вершина была концом ребра из выбранного множества.
4. Дан двудольный граф. Проверить, правда ли число совершенных паросочетаний четно.
5. Докажите, что если в дереве есть совершенное паросочетание, то оно единственно.
6. Предложите алгоритм, который находит все вершины двудольного графа, покрытые всеми максимальными паросочетаниями за $O(n+m)$, если вам задано одно максимальное паросочетание.
7. Предложите алгоритм, который находит все вершины двудольного графа, покрытые хотя бы одним максимальным паросочетанием за $O(n+m)$, если вам задано одно максимальное паросочетание.
8. Предложите алгоритм, который находит все ребра двудольного графа, принадлежащие всем максимальным паросочетаниям за $O(n+m)$, если вам задано одно максимальное паросочетание.
9. Предложите алгоритм, который находит все ребра двудольного графа, принадлежащие хотя бы одному максимальному паросочетанию за $O(n+m)$, если вам задано одно максимальное паросочетание.
10. Есть двудольный граф. Существует паросочетание покрывающее множество $A \subset L$, также существует паросочетание покрывающее множество $B \subset R$. Докажите, что существует паросочетание покрывающее $A \cup B$.

11. Докажите, что в регулярном двудольном графе существует полное паросочетание, и что d-регулярный граф можно разбить на d непересекающихся паросочетаний.
12. Предложите алгоритм, который находит разбиение ребер двудольного графа на d совершенных паросочетаний в d-регулярном графе за $O(nm \log d)$.
13. Дефектом множества вершин левой доли в графе называется $def(A) = |N(A)| - |A|$. Найти в двудольном графе множество с минимальным дефектом.
14. Есть поле $n \times n$, некоторые клетки которого удалены. Положить на поле максимальное число доминошек 2×1.
15. Есть поле $n \times n$, некоторые клетки которого удалены. Поставить максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга.
16. Есть поле $n \times n$, некоторые клетки которого удалены. Поставить максимальное число ладей так, чтобы они не били друг друга (ладьи бьют через удаленные клетки).
17. Есть поле $n \times n$, каждая клетка либо свободна, либо заполнена стеной. Поставить максимальное число ладей так, чтобы они не били друг друга (ладьи не бьют через стены).

2 Неделя 2

Паросочетания

18. Докажите, что любое максимальное по включению паросочетание не более чем в два раза меньше максимального паросочетания (это, например, означает, что любой жадный алгоритм ошибается не больше чем в два раза).
19. Приведите пример графа, в котором какое-то максимальное по включению паросочетание имеет размер M, а максимальное — $2M$.
20. Почему нам важно, чтобы дополняющий путь был простой? Приведите пример, когда существует путь, похожий на дополняющий (первая и последняя вершины свободные, каждое второе ребро из паросочетания), но не простой (проходит по некоторым ребрам или вершинам несколько раз), но при этом увеличить паросочетание нельзя.
21. Почему нам важно, чтобы у соцветия был стебель? Приведите пример когда есть цикл, похожий на соцветие (нечетной длины, каждое второе ребро из паросочетания), но если его сжать, то в графе потеряется дополняющий путь (то есть, до сжатия паросочетание можно было увеличить, а после — нельзя).
22. Почему нужно разжимать соцветия после нахождения дополняющего пути? Почему нельзя сжать соцветие навсегда, найти максимальное паросочетание в том, что получилось, а потом разжать обратно?
23. Рассмотрим следующий алгоритм поиска дополняющего пути: раздвоим вершины, для каждого ребра $v - u$ не из паросочетания построим ребро из $(v, 0) - (u, 1)$, для каждого ребра $v - u$ из паросочетания построим ребро из $(v, 1) - (u, 0)$. Найдем обходом в глубину путь из $(s, 0)$ в $(t, 1)$ для свободных вершин s и t. Перенесем этот путь в исходный граф, в нем каждое второе ребро — из паросочетания, все как надо. Что тут не так?
24. Неточное паросочетание. Каждому ребру заданного графа сопоставить вещественное число от 0 до 1 так, чтобы для каждой вершины сумма чисел на инцидентных ребрах была не больше 1. Максимизировать сумму чисел. Чем эта задача похожа на паросочетание и почему это не одно и то же?
25. Решите задачу о неточном паросочетании за полином от размера графа.

26. Приведите контрпример для следующего алгоритма поиска размера максимального паросочетания в произвольном графе. Создать двудольный граф из $2|V|$ вершин, для $v \in V$ создать по вершине в обеих долях: l_v и r_v. Для каждого ребра vu создать ребра $l_v r_u$ и $l_u r_v$. Посчитать максимальное паросочетание в двудольном графе M, в ответ выдать $\left\lfloor \frac{|M|}{2} \right\rfloor$.
27. Сведите задачу о минимальном реберном покрытии к задаче о максимальном паросочетании в произвольном графе. Задача о реберном покрытии: задан неориентированный граф $\langle V, E \rangle$, найти минимальное множество $F \subset E$, такое, что $\forall v \in V\ \exists u : vu \in F$.

3 Неделя 3

Потоки 1

28. Докажите, что если в G существует поток величины x, то для любого $0 \leqslant y < x$, существует поток величины y.
29. Докажите, что если в сети E ребер, и пропускная способность каждого не больше C, то величина максимального потока не превосходит CE.
30. Сведите задачу о максимальном паросочетании в двудольном графе к нахождению максимального потока. Как связаны разрез и минимальное вершинное покрытие?
31. Приведите пример сети с вещественными пропускными способностями, в котором алгоритм Форда-Фалкерсона может никогда не завершиться.
32. Проверить, что в графе существует единственный минимальный разрез.
33. Как изменить алгоритм Форда-Фалкерсона, чтобы он работал для неориентированного графа?
34. Дан неориентированный граф. Найти максимальное число реберно непересекающихся путей из s в t.
35. Дан неориентированный граф. Найти максимальное число вершинно непересекающихся путей из s в t.
36. Пусть в сети есть ребра $v \to u$ и $u \to v$. Докажите, что существует максимальный поток, в котором по одному из этих ребер ничего не течет.
37. Есть клеточное поле $n \times m$. Некоторые клетки свободны, некоторые заняты горами. Есть два замка. Нужно построить в некоторых клетках стены, так чтобы нельзя было пройти от одного замка к другому (нельзя ходить по горам и стенам). Какое минимальное число клеток надо застроить?
38. Дан неориентированный граф. В некоторых вершинах находятся k фабрик и k магазинов. Соедините каждую фабрику с магазином так, чтобы пути не пересекались. Т.е. фабрики и магазины нужно разбить на пары, каждую пару соединить путем.
39. Есть прямоугольный торт $n \times m$. На нем лежат k вишенок и k клубничек. Разрезать торт на k связных кусков так, чтобы в каждом куске была и вишенка, и клубничка.

4 Неделя 4

Потоки 2

40. Шелдон и Леонард играют в «Камень, Ножницы, Бумага, Ящерица, Спок». У каждого есть n карточек, на которых нарисовано по одному из символов. Для хода, каждый выбирает по одной карточке из своей руки, затем значения на выбранных карточках сравниваются, затем

выбрасываются. Таким образом, будет сыграно n конов. Какое максимальное количество раз Шелдон может выиграть (если он всегда знает, что выложит Леонард)?

41. Докажите реберную теорему Менгера: минимальное число ребер, которые необходимо удалить в графе, чтобы из s в t не было пути, равно максимальному числу реберно непересекающихся путей из s в t.

42. Докажите вершинную теорему Менгера: минимальное число вершин, которые необходимо удалить в графе, чтобы из s в t не было пути, равно максимальному числу вершинно непересекающихся путей из s в t (s и t удалять нельзя).

43. Постройте граф, в котором $E = O(V^2)$ и алгоритм Диница работает за время $\Omega(V^4)$.

44. Дана сеть без выделенного истока и стока (поток в таком графе называется циркуляцией). Для каждого ребра известна пропускная способность $f_{uv} \leqslant c_{uv}$. Закон сохранения жижи немного другой: для каждой вершины известно, какой в ней должен быть баланс $\sum f_{vu} = b_v$. Построить циркуляцию с заданными ограничениями.

45. Дана сеть без выделенного истока и стока. Для каждого ребра известно два числа: минимальный и максимальный поток по этому ребру $l_{uv} \leqslant f_{uv} \leqslant r_{uv}$. Закон сохранения жижи обычный: для каждой вершины баланс должен быть равен нулю. Построить циркуляцию с заданными ограничениями.

46. Есть клеточное поле $n \times m$. Некоторые клетки свободны, некоторые заняты горами. В некоторые свободные клетки нужно посадить деревья. Ботаники посчитали, что для того, чтобы всем хватило ресурсов, в строке i должно быть не больше r_i деревьев, а в столбце j — не больше c_j для всех i и j. Какое максимальное число деревьев можно посадить?

47. Есть таблица $n \times m$. Нужно заполнить ее целыми числами. Для каждой клетки известно минимальное и максимальное значение, для каждой строки и каждого столбца известно минимальное и максимальное значение суммы.

48. Задан неориентированный граф. Найдите простой путь из вершины a в вершину c, проходящий через вершину b.

Мальчик Вася не умеет в потоки. Он где-то прочитал алгоритм Эдмонса-Карпа, но не осознал его. Поэтому когда надо было его реализовать, он сделал ошибку: не добавил обратные ребра. Поэтому при поиске дополняющего пути он всегда идет только вдоль направления ребра.

49. Найти (по возможности маленький) тест, на котором алгоритм Васи работает неправильно.

50. Во сколько раз ответ Васи может отличаться от правильного?

5 Неделя 5

Потоки 3

51. Пусть сеть представляет собой планарный граф. Для простоты скажем, что вершины заданы точками на плоскости, ребра — отрезками, вершины s и t — это самая левая и самая правая точка, соответственно. Найти величину максимального потока из s в t быстрее, чем за $O(nm)$. (Подсказка: посмотрите, что собой представляет разрез в таком графе)

52. Дана сеть с целыми пропускными способностями и уже построенным максимальным потоком. После чего пропускную способность одного ребра уменьшили на 1. Предложите алгоритм обновления максимального потока (быстрее, чем просто перестроить поток целиком).

53. Дана сеть с целыми пропускными способностями. Найдите из всех минимальных разрезов такой, в котором минимальное число ребер.

54. Дан граф, в вершине s находятся k грузов, которые нужно доставить в вершину t. За один ход по каждому ребру можно перевезти не более одного груза. Предложите алгоритм нахождения минимального времени, за которое можно доставить все грузы (полиномиальный от k и размеров графа).
55. В турнире участвуют n команд, каждая играет с каждой. Некоторые игры уже сыграны, некторые еще нет. За победу команда получает два очка, при ничьей обе команды получают по одному очку. Проверить, может ли команда 1 выиграть в турнире?
56. Есть ориентированный граф, в каждой вершине число входящих и исходящих ребер одинаково. Пусть в этом графе существует k реберно непересекающихся путей из v в u. Докажите, что в нем также есть k реберно непересекающихся путей из u в v.
57. Есть n девочек, n сумочек и n туфель. Каждой девочке нравится какое-то множество сумочек и туфель. Сколько можно выбрать (непересекающихся) наборов девочка-сумочка-туфли?
58. Есть поле $n \times n$, которое нужно полить удобрениями. Это можно делать тремя способами: можно полить одну клетку (i, j), это будет стоить $c[i, j]$, можно полить целиком горизонталь i, это будет стоить $x[i]$, можно целиком вертикаль j, это будет стоить $y[j]$. Нужно полить все клетки хотя бы по одному разу, минимизировав суммарную стоимость.
59. Дано n карточек, на i-й карточке записаны числа $L_i, L_i + 1, \dots, R_i$. Нужно собрать набор карточек, на котором были бы записаны все числа от 1 до M по одному разу. Сколько непересекающихся наборов можно собрать?
60. Вы играете в настольную игру. В игре есть n различных ресурсов, а также n различных заводов, производящих соответствующий ресурс. Вы можете, потратив a_i монеток построить завод, производящий i-й ресурс. Также есть m покупателей, которые хотят купить по одному предмету. Для каждого предмета известно, какие ресурсы требуются для его производства. Покупатель с номером i заплатит b_i монеток за предмет. Найдите максимальную выгоду, которую вы можете получить, за полиномиальное от n и m время.
61. Задан двудольный граф. Нужно раскрасить ребра в k цветов так, чтобы для любой вершины все инцидентные ей ребра были раскрашены в разные цвета. Определите минимальное k, при котором это можно сделать, и найдите раскраску в k цветов, за полиномиальное от размера графа время.
62. Задача об устойчивом паросочетании. Задан двудольный граф с равным числом вершин в долях. Для каждой вершины каждой доли известен порядок предпочтения вершин другой доли (каждая вершина знает, какая вершина другой доли ей нравится больше всего, какая вершина на втором месте, и так далее). Паросочетание называется устойчивым, если никакие две вершины не могут обменяться парами, чтобы для каждой из них новый партнер стал более предпочтительным. Требуется построить устойчивое полное паросочетание за $O(VE)$.

6 Неделя 6

Задача о назначениях

63. Дан взвешенный орграф. Покрыть все его вершины простыми непересекающимися циклами минимального суммарного веса.
64. Есть множество, на его элементах задан частичный порядок, описанный как некий орграф. Найти и предъявить максимальное по размеру множество попарно несравнимых элементов.
65. Модифицируйте венгерский алгоритм для поиска по прямоугольной матрице паросочетания размера $\min(n, m)$. Оценить сложность.

66. По заданной квадратной матрице a_{ij} найти такие вектора x и y, что $x_i + y_j > a_{ij}$, и $\sum x_i + \sum y_j \to \min$.
67. Дано дерево. Вершину v можно покрасить в цвет $c \in [1, k]$ за $cost[v, c]$. Покрасить за минимальную цену все вершины так, чтобы расстояние между вершинами одинакового цвета было строго больше двух. Время $O(nk^4)$.
68. Скажем, что матрица a_{ij} хорошая, если для любой клетки выполняется $a_{i,j} + a_{i+1,j+1} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$. Дана матрица a_{ij}, нужно увеличить ее элементы так, чтобы она стала хорошей, при этом суммарное увеличение было минимальным.
69. Дан взвешенный двудольный граф. Скажем, что вес паросочетания — это вес максимального ребра в нем. Постройте полное паросочетание минимального веса.
70. n деталей нужно обработать на двух станках: сначала на первом, потом на втором. Каждый станок может обработать не более одной детали в день. Обработка детали на первом станке в день i стоит a_i рублей, а на втором — b_i рублей. Надите минимальную суммарную стоимость.
71. Пусть в графе уже построено полное паросочетание минимального веса, после этого вес одного из ребер увеличивается. Покажите, как перестроить паросочетание (быстрее, чем строить с нуля).
72. Пусть в графе уже построено полное паросочетание минимального веса, после этого вес одного из ребер уменьшается. Покажите, как перестроить паросочетание (быстрее, чем строить с нуля).

7 Неделя 7

Поток минимальной стоимости

73. Докажите, что поток F является потоком минимальной стоимости тогда и только тогда, когда существует способ выбрать потенциалы $\phi[i]$ таким образом, чтобы:
    - если $s'_e > 0$, то $f_e = 0$,
    - если $s'_e = 0$, то $0 < f_e < c_e$,
    - если $s'_e < 0$, то $f_e = c_e$,

74-76. Рассмотрим следующую задачу: дана сеть, построить в ней поток размера X минимальной стоимости. Покажите, что следующие задачи не проще и не сложнее, чем эта задача (то есть, сведите задачи одну к другой, в обе стороны):

    74. Найти максимальный поток минимальной стоимости.
    75. Найти циркуляцию минимальной стоимости.
    76. Дана сеть, пропускные способности всех ребер бесконечные, для каждой вершины известно, какой в ней должен быть баланс. Построить поток минимальной стоимости, удовлетворяющий ограничениям.

77. Докажите, что любую циркуляцию можно разделить на $O(m)$ циклов.
78. Пусть уже построена некоторая циркуляция, ее вес равен S, при этом вес циркуляции минимального веса равен S_{min}. Докажите, что если дополнить циркуляцию вдоль (отрицательного) цикла минимального веса, то вес циркуляции уменьшится хотя бы на $(S - S_{min})/m$.
79. Покажите, что алгоритм поиска циркуляции минимальной стоимости, дополняющий поток вдоль произвольного отрицательного цикла не является полиномиальным.

80. Задан неориентированный взвешенный граф с ребрами неотрицательного веса. Найдите кратчайший простой путь из вершины a в вершину c, проходящий через вершину b за $O(m \log n)$.

81. Самолет последовательно посещает города от 1 до n. Для каждой пары (i, j) известно, что есть b_{ij} пассажиров, ктороые бы хотели лететь из города i в город j. Каждый из этих пассажиров готов заплатить f_{ij} за поездку. Самолет может перевозить не более k пассажиров одновременно. Найти максимальную прибыль.

82-83. Пусть F — поток минимальной стоимости, причем все значения c_e и w_e — целые.

 82. Предположим, что мы увеличиваем или уменьшаем c_e на единицу. Насколько эффективно можно найти новое оптимальное решение?

 83. Предположим, что мы увеличиваем или уменьшаем w_e на единицу. Насколько эффективно можно найти новое оптимальное решение?

8 Неделя 8

Разное

84-86. Дан граф, в нем выделены три вершины. Удалить минимальное число ребер так, чтобы эти вершины были в разных компонентах связности.

 84. Петя решает предыдущую задачу так: сначала находит минимальный разрез между вершинами A и B, затем смотрит, в какой из честей этого разреза оказалась вершина C и строит минимальный разрез между C и соответствующей вершиной (A или B). Покажите, что алгоритм Пети не всегда находит оптимальное решение.

 85. Является ли алгоритм Пети α-приближенным (то есть правда ли, что ответ, полученный Петей, отличается от правильного не более чем в α раз)? Для какого α?

 86. Вася улучшил алгоритм Пети: давайте переберем все перестановки A, B и C, к каждой применим Петин алгоритм и возьмем минимум. Покажите, что Васин алгоритм тоже не оптимальный.

87. Та же задача, но граф планарный и выделенные вершины находятся на выпуклой оболочке.

88. Та же задача для k вершин. Предложите k-оптимальный алгоритм. Можно ли лучше?

89. В алгоритме Каргера-Штейна будем делать не два рекурсивных вызова, а три. Как это повлияет на вероятность успеха и на общее время работы?

90. А если при этом еще делать первую часть не до $n/\sqrt{2}$, а до n/k для какого-то k.

91. Попробуйте поиграв с параметрами алгоритма понять, откуда появилась константа $\sqrt{2}$, и можно ли сделать другую?

92. Есть граф. В нем находятся несколько фишек. За один ход каждая фишка остается на месте или перемещается вдоль ребра. У вас есть несколько троек (x_i, y_i, z_i), означающих, что после хода x_i в вершине y_i находится z_i фишек. Какое минимальное число фишек гуляет по графу?

93. Есть таблица, в каждой клетке записано число от 0 от 4. Соединить некоторые соседние клетки, чтобы для каждой клетки число клеток, соединенных с ней, было равно числу, записанному в клетке.

94. Есть граф, для каждого ребра указаны числа c_{uv} и f_{uv}. Нужно, изменив некоторые c_{uv} и f_{uv}, сделать из этого правильную сеть с потоком в ней, так, чтобы суммарные изменения $(\sum(|c_{uv} - c'_{uv}| + |f_{uv} - f'_{uv}|)$ были минимальны.

95. Есть таблица, в которой записаны числа от 1 до n, каждое ровно по два раза. Нужно переставить минимальное число элементов так, чтобы одинаковые числа стояли в соседних клетках таблицы.

96. Есть строка t и набор слов s_i. Для каждого слова известна его стоимость. Нужно выделить в t несколько различных подстрок, каждая из которых равна какому-то из слов, так, чтобы каждая буква строки использовалась не более чем в x подстроках, и суммарная стоимость подстрок была максимальна.

97. Есть граф, у каждой вершины и каждого ребра есть неотрицательная стоимость. Стоимостью подграфа заданного графа назовем сумму стоимостей всех ребер минус стоимость всех вершин. Найти подграф с максимальной стоимотстью.

98. Есть n позиций, для каждой позиции известно, какие из n чисел можно на нее поставить. Назовем стоимостью массива сумму квадратов числа вхождений каждого числа. Постройте массив с минимальной стоимостью.

9 Неделя 9

Линейное программирование

99-101. Рассмотрим задачу поиска максимума в массиве.

   99. Сформулируйте задачу в форме задачи линейного программирования
   100. Покажите, что все вершины соответсвующего полиэдра имеют целые координаты
   101. Постройте двойственную задачу, попробуйте понять ее физический смысл

102-104. Рассмотрим задачу поиска вершинного покрытия минимального веса. Дан граф, каждая вершина имеет вес. Требуется построить вершинное покрытие, в котором суммарный вес выбранных вершин минимален.

   102. Сформулируйте задачу в форме задачи линейного программирования
   103. Приведите пример графа, на котором в этой задаче оптимум достигается не в целой точке
   104. Покажите, как построить 2-приближенный алгоритм, используя решение задачи в вещественных числах

105-106. Рассмотрим задачу поиска минимального остовного дерева в графе.

   105. Рассмотрим некоторое множество из $n-1$ ребра. Попробуем сформулировать свойство, что это множество является остовным деревом. Пустим в середину каждого ребра из истока ребро с пропускной способностью 1, а из каждой вершины в сток — ребро с пропускной способностью $1-1/n$. Покажите, что в такой сети есть поток размера $n-1$ тогда и только тогда, когда данное множество является остовным деревом.
   106. Сопоставим каждому ребру переменную $x_e \in \{0,1\}$. Используя результат из прошлого пункта, сформулируйте в терминах линейного программирования свойство, что множество ребер, для которых $x_e = 1$, является остовным деревом.

107-108. Рассмотрим задачу поиска кратчайшего пути в графе.

   107. Проще всего сформулировать эту задачу в форме задачи линейного программирования, записав ее как поток минимальной стоимости размера 1. Попробуйте это сделать.
   108. Постройте двойственную задачу, попробуйте понять ее физический смысл

109. Рассмотрим следующий процесс. Изначально есть n предметов, стоимость i-го предмета — c_i. Есть два игрока: вы и ваш оппонент. Вы независимо выбираете один из оставшихся предметов. Если вы выбрали один и тот же предмет, его забирает ваш оппонент, и процесс продолжается на оставшемся множестве предметов. Если вы выбрали разные предметы, вы забираете выбранный вами предмет, оппонент забирает все оставшиеся, и процесс прекращается. Выигрыш участника равен сумме стоимостей взятых им предметов. Вы стараетесь максимизировать свой выигрыш, ваш оппонент — свой. Вы оба действуете оптимально. Чему равно матожидание вашего выигрыша? $n \leqslant 10$

10 Неделя 10

Быстрое преобразование Фурье

110. Дано число длины n в a-ичной системе счисления. Переведите его в b-ичную систему счисления. Время $O(n \cdot \log(\max(a, b)) \cdot polylog(n))$.
111. Даны два массива чисел a и b одинаковой длины. Вычислите скалярные произведения a со всеми циклическими сдвигами b. Время $O(|a| \cdot \log |a|)$.
112. Даны две одномерные пластины, разделенные на ячейки по 1 мм. В некоторых ячейках первой пластины есть выступы, в некоторых ячейках второй — пазы. Найти все сдвиги, при которых можно совместить пластины (для этого все выступы должны войти в пазы). Время $O(n \cdot \log n)$.
113. То же самое с двумерными пластинами. Время $O(nm \cdot (\log n + \log m))$.
114. Дана строка t и шаблон s. Строка t состоит из строчных латинских букв, шаблон s состоит из строчных латинских букв и знака «?». Найти все наложения s на t, удовлетворяющие шаблону. Время $O(|t| \cdot \log |t|)$ (без домножения на Σ).
115. Дано дерево. Для всех d от 1 до $n - 1$, вычислить количество простых путей длины d.
116. Найти число AVL деревьев из n вершин высоты h, быстрее чем за $O(n^2)$.
117. За какое время можно возвести полином степени n в степень k?
118. Посчитать количество слов длины n из строчных латинских букв с заданным значением полиномиального хеша. Вам даны p — основание для вычисление хеша, m — модуль, x — значение хеша. Время $O(m \cdot \log m \cdot \log n)$.