Содержание

1 Введение. Предикат поворота.

1. Докажите (а за одно обратите внимание), что от перестановки местами векторов меняется знак предиката поворота.
2. Докажите, что не одномерный случай в проверке двух отрезков на пересечение корректен.
3. С помощью предиката поворота (здесь и далее) проверьте, что пересекаются прямые AB и CD.
4. Проверьте, что пересекаются прямая AB и луч CD.
5. Проверьте, что пересекаются прямая AB и отрезок CD.
6. Проверьте, что пересекаются луч AB и луч CD.
7. Проверьте, что пересекаются луч AB и отрезок CD.
8. Проверьте, что точка P лежит внутри треугольника ABC.

2 Многоугольники. Планарные графы.

9. Проверить, что многоугольник является простым, за $O(n^2)$.
10. Найти триангуляцию многоугольника за $O(n^4)$.
11. Скажем, что точка принадлежит многоугольнику, если она лежит внутри него, либо на границе. Два многоугольника пересекаются, если у них есть общая точка. Проверьте, пересекаются ли два многоугольника за $O(n \cdot m)$, где n и m — количество вершин в многоугольниках.
12. Проверить, пересекаются ли два выпуклых многоугольника, за $O(n \cdot \log m)$.
13. Найти расстояние от точки до отрезка.
14. Дан выпуклый многоугольник. Поступают запросы: найти расстояние от точки до многоугольника. Предподсчет $O(n)$, запрос $O(\log n)$. Формально, нужно вычислить $\inf\limits_{a \in A} dist(a, p)$, где A — многоугольник, p — точка запроса. В частности, если p лежит внутри A, ответ — 0.
15. Расстояние между многоугольниками A и B это $\inf\limits_{a \in A, b \in B} dist(a, b)$. Найдите расстояние между двумя многоугольниками за $O(n \cdot m)$.

3 Триангуляция многоугольника. Выделение граней связного планарного графа. DCEL.

16. Подумайте, как выглядит грань планарного графа в общем случае (т.е. когда граф может быть не связен). Как грань можно описать? Придумайте полиномиальный алгоритм для нахождения всех граней.
17. Найдите площадь пересечения двух многоугольников. Время $O((n+m)^2)$.
18. Есть замок. Стены замка описываются связным планарным графом. Одна стена — одно ребро графа. В местности, где стоит замок, случилось наводнение. Всю внешнюю грань затопило водой. Затем, каждый день происходит следующее: одновременно ломаются все стены, которые разделяют затопленную и незатопленную области. Для каждой стены определите номер дня, в который она сломается. Либо скажите, что она останется стоять.
19. Разделить многоугольник на два многоугольника с одинаковыми площадями. Время $O(n^2)$.

4 Выпуклая оболочка.

20. Дано n точек p_i. Поступает запрос — прямая. Найдите среди p_i наиболее удаленную от прямой. Ответ на запрос за $O(\log n)$.
21. Проверить, пересекаются ли прямая и выпуклый многоугольник. Ответ на запрос за $O(\log n)$.
22. Дана полилиния без самопересечений. Постройте ее выпуклую оболочку за $O(n)$.
23. Даны два множества точек. Найдите прямую, которая их разделяет. Т.е. такую прямую, чтобы все точки одного множества были по одну сторону, а все точки второго — по другую. Время $O(n \log n)$, где n — общее количество точек.
24. Дан выпуклый многоугольник — это стена. Снаружи от него даны несколько точек — в них расположены фонари. Фонарь светит во все стороны на любое расстояние. Определить длину освещенной части стены.

5 Разное.

25. Постройте сумму Минковского для двух невыпуклых многоугольников.
26. Дано множество точек. Найти равносторонний треугольник минимального размера, покрывающих их все.
27. Изучите, работает ли (и работает ли за линию) алгоритм для поиска минимальной сферы, содержащей все заданные точки в 3d. По аналогии с 2d алгоритмом для круга.
28. Дано множество непересекающихся, не вертикальных и не горизонтальных отрезков. Это вид сбоку на некоторую стену. Капля дождя падает сверху вниз по вертикальной прямой с координатой x_s. Когда капля попадает на какой-то отрезок, она скатывается по нему до его нижнего конца, после чего продолжает падать вертикально вниз. Определите координату x, по которой капля будет падать в конце. Время $O(n \log n)$, где n — число отрезков.
29. То же самое, что в прошлой задаче, но капель много, надо определить для каждой. Время $O((n+m) \log n)$, где m — число капель.
30. Дан коридор, в нем расположено несколько препятствий — выпуклых многоугольников. Вы хотите провести по коридору круг, при это вы начинаете по одну сторону от всех препятствий, а закончить должны по другую сторону от всех препятствий. Определите максимальный радиус круга, для которого это возможно.

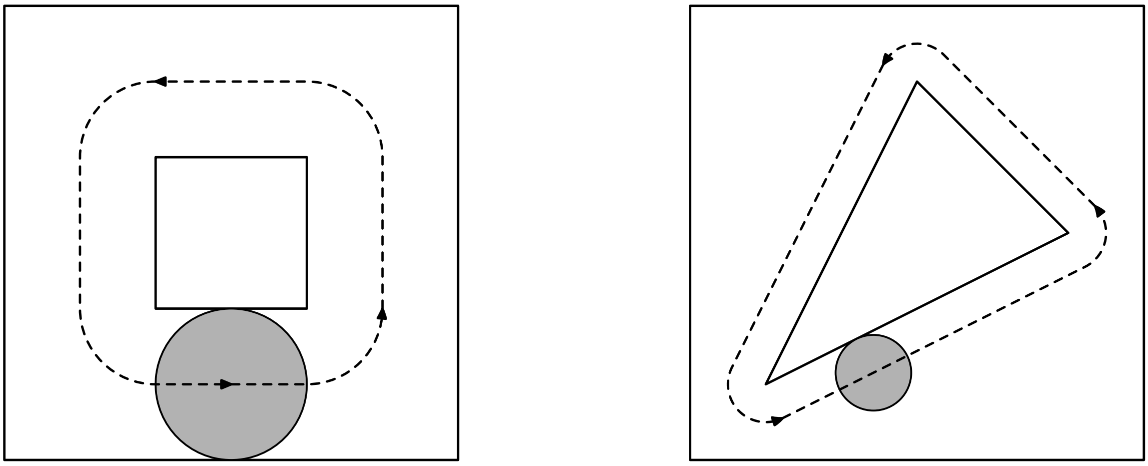
31. Дано прямоугольное поле, на котором расположено несколько препятствий — выпуклых многоугольников. Где-то на поле расположен предмет — тоже выпуклый многоугольник. Его нужно переместить в другое место (тоже дано). Предмет можно двигать параллельным переносом (без вращений). Определите, возможно ли его переместить. За полином.

6 Пересечение полуплоскостей.

32. На плоскости дано несколько прямых l_i. Нужно найти точку p, чтобы $\max\limits_i dist(l_i, p) \to \min$.

33. Дан выпуклый многоугольник. Можно удалить несколько вершин многоугольника, при этом многоугольник превратится в выпуклую оболочку оставшихся вершин. Какое минимальное количество вершин надо удалить, чтобы p оказалась вне многоугольника?

34. Даны два выпуклых многоугольника. Нужно разместить один внутри другого пареллельным переносом так, чтобы между ними по кругу мог проехать круг максимального радиуса (см. картинки).



7 Разное.

35. Дано n точек, рассмотрим эти точки как вершины полного графа. Вес ребра графа равен расстоянию между соответствующими точками. Найдите минимальное остовное дерево за $O(n \log n)$.

36. Диаграммой Вороного k-го порядка называется разбиение плоскости на классы эквивалентности, каждая точка плоскости относится к k-му по удаленности центру. Постройте диаграмму Вороного k-го порядка (за любое время).

37. Дано n точек. Как в диаграмме Вороного, построим разбиение плоскости на области. Будем относить точку плоскости к самому далекому центру. Т.е. это диаграмма Вороного n-го порядка. Постройте такое разбиение за $O(n \log n)$.

38. Построить аналог диаграммы Вороного для множества прямых. $O(n^2)$.

39. Дан произвольный многоугольник. Необходимо разбить внутренность многоугольника на классы эквивалентности по ближайшей стороне многоугольника. Набор границ такого разбиения еще называют straight skeleton.