

# Содержание

<b>1</b>	<b>Неделя 1</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Неделя 2</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Неделя 3</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Неделя 4</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Неделя 5</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Неделя 6</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Неделя 7</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Неделя 8</b>	<b>7</b>
<b>9</b>	<b>Неделя 9</b>	<b>8</b>
9.1	Хеши	8
9.2	Префикс-функция, КМП	9
9.3	Z-функция	9
<b>10</b>	<b>Неделя 10</b>	<b>10</b>
10.1	Бор	10
10.2	Алгоритм Ахо-Корасик	10
<b>11</b>	<b>Неделя 11</b>	<b>11</b>
11.1	Суффиксный массив	11
<b>12</b>	<b>Неделя 12</b>	<b>11</b>
12.1	Суффиксное дерево	11

## 1 Неделя 1

- Докажите, что если в ориентированном графе нет циклов, то в нем есть хотя бы один исток.
- Раскраской графа в  $k$  цветов называется назначение каждой вершине одного из цветов. Раскраска называется правильной, если нет пары одноцветных вершин, соединенных ребром. Дан неориентированный граф. Покрасьте его правильным образом в два цвета, либо определите, что это невозможно. Время  $\mathcal{O}(E + V)$ .
- Есть  $n$  человек ( $n$  четное,  $n \leq 10\,000$ ), некоторые пары дружат. Требуется разбить их на две команды по  $\frac{n}{2}$  человек в каждой. При этом, не должно быть такого, что два друга попали в разные команды.
- Рассмотрим dfs:

```
int dfs(int v) {
    visited++
    for (int u : outgoingEdges[v]) {
        if (visited < n) {
            dfs(u)
        }
    }
}
```

```
}  
  
visited = 0  
  
for (int v = 0; v < n; ++v) {  
    if (visited < n) {  
        dfs(v)  
    }  
}
```

Докажите или опровергните, что данный фрагмент кода, запущенный на ациклическом ориентированном графе, работает за время  $\mathcal{O}(E + V)$ .

5. Докажите или опровергните, что фрагмент кода из предыдущей задачи, запущенный на произвольном ориентированном графе, работает за время  $\mathcal{O}(E + V)$ .
6. Задан ациклический ориентированный граф, некоторые вершины красные, а некоторые чёрные. Для каждой вершины  $v$  ответьте на два вопроса: существует ли путь из чётного числа ребер из вершины  $v$  в какую-нибудь красную и существует ли путь из нечётного числа ребер из  $v$  в красную за время  $\mathcal{O}(E + V)$ .
7. Задан ациклический ориентированный граф, некоторые вершины красные, а некоторые чёрные, а также некоторые рёбра синие, а некоторые зеленые. Определите для каждой вершины  $v$ : существует ли путь из  $v$  до красной вершины, который не проходит по двум рёбрам одинакового цвета подряд, за время  $\mathcal{O}(E + V)$ .
8. Есть  $n$  гирек попарно различных весов. Вам дана последовательность из  $m$  взвешиваний на чашечных весах: в каждом взвешивании участвовали ровно две гирьки, по одной на каждой из чаш. В результате взвешивания вам говорили, какая из гирек легче. Возможно, некоторые из результатов некорректные. Определите, после какого минимального числа взвешиваний полученная информация стала противоречивой за  $\mathcal{O}((n + m) \log n)$ .
9. У вас есть  $n$  дел, некоторые дела зависят от других: их нельзя сделать раньше тех, от которых они зависят. Граф зависимостей дел не имеет циклов. Каждое дело занимает у вас один час. Дело под номером  $x$  является очень важным. Определите порядок выполнения всех дел, чтобы дело номер  $x$  было выполнено как можно раньше. За линейное от размера входных данных время.
10. Задан ациклический ориентированный граф. Найдите в нем простой (не проходящий по вершинам дважды) путь из максимального числа ребер за  $\mathcal{O}(E + V)$ .
11. Предложите алгоритм, который находит лексикографически минимальную топологическую сортировку за  $\mathcal{O}((V + E) \log V)$ .
12. Предложите алгоритм, который находит топологическую сортировку, у которой обратная перестановка минимальна лексикографически за  $\mathcal{O}((E + V) \log V)$ .
13. Предложите алгоритм, который добавляет в граф не более  $k$  ребер, чтобы лексикографически минимальная топологическая сортировка была максимальной за  $\mathcal{O}((E + V) \log V)$ .

## 2 Неделя 2

14. Дан ориентированный граф. Какое минимальное число ребер нужно добавить в него, чтобы он стал сильно связным?
15. Дан ориентированный граф. Постройте граф, с таким же множеством вершин и минимальным числом ребер, чтобы его конденсация совпала с конденсацией данного графа.

16. Для каждой вершины графа найти вершину с минимальным номером, достижимую из нее.
17. Турниром называется ориентированный граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром (в одну или другую сторону). Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
18. Докажите, что если в каждой вершине турнира число входящих и исходящих ребер одинаково, то турнир сильно связан.
19. Дано число  $n$  и  $m$  пар  $(a_i, b_i)$ . Нужно построить ориентированный граф на  $n$  вершинах с минимальным числом ребер, в котором для каждой пары существует путь из  $a_i$  в  $b_i$ .
20. Найти решение 2-SAT, в котором число переменных, равных 1, минимально. Шутка, это NP-полная задача. Но если для каждой скобки  $(X|Y)$  есть парная скобка  $(!X|!Y)$  (а для  $(!X|Y)$  соответственно  $(X|!Y)$ ), то задачу можно решить. Как?
21. Найти решение 2-SAT, в котором ответ лексикографически минимален (то есть последовательность из значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  лексикографически минимальна из всех последовательностей, на которых выполняется формула). (Это же явно сложнее, чем просто минимизировать число единиц, наверняка тоже NP-полная, да?)
22. Найдите следующее в лексикографическом порядке решение 2-SAT.
23. Есть  $n$  переменных, каждая из которых может принимать значения от 1 до  $k$  и  $m$  следствий вида  $x_i = a \Rightarrow x_j = b$ . Найдите значения, которые могут принимать переменные. Решите за полином, либо докажите (ну почти), что это невозможно.
24. Есть  $n$  различных целых чисел:  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и константы  $a$  и  $b$ . Нужно разделить все числа на два множества, A и B, чтобы выполнялись условия: Если число  $x$  принадлежит множеству A, то число  $a - x$  также должно принадлежать множеству A. Если число  $x$  принадлежит множеству B, то число  $b - x$  также должно принадлежать множеству B.
25. Есть  $n$  городов, образующих кольцо — пары городов с номерами  $i$  и  $i + 1$ , а так же  $n$  и 1 соединены дорогами. Нужно построить  $m$  новых дорог, для каждой дороги известно какие города она должна соединять. Каждая дорога будет представлять собой непрерывную линию, находящуюся внутри, либо снаружи кольца. Дороги не должны иметь общих точек (кроме концов). Можно ли построить дороги? Если возможно, то какие дороги должны находиться внутри кольца, а какие снаружи?
26. Есть  $n$  булевых переменных и  $m$  утверждений вида  $x_i = x_j$  или  $x_i \neq x_j$ . Найдите решение, в котором разница между числом переменных, равных 0 и числом переменных, равных 1, минимальна.
27. Дан неориентированный граф из  $n$  вершин и  $m$  рёбер. Каждое из рёбер графа изначально покрашено либо в красный, либо в синий цвет. За один ход разрешается выбрать произвольную вершину, и изменить цвета всех инцидентных ей рёбер, то есть все красные рёбра, заканчивающиеся в этой вершине, становятся синими, и наоборот, все синие становятся красными.

Найдите кратчайшую последовательность ходов, после выполнения которой все рёбра графа будут покрашены в один цвет.

### 3 Неделя 3

28. Дан неориентированный граф. Сколько ребер нужно добавить в него, чтобы он стал реберно двусвязным?
29. Дан неориентированный связный граф. Ориентировать его ребра так, чтобы получился сильно связный граф.

30. Какое максимальное число точек сочленения может быть в графе с  $n$  вершинами?
31. Какое максимальное число мостов может быть в графе с  $n$  вершинами?
32. Дан граф. После подсчета за  $O(E + V \log V)$  нужно за  $O(\log V)$  отвечать на запросы: для данных вершин  $u$  и  $v$ , сколько есть ребер, по которым мы обязательно пройдем, если будем идти из  $u$  в  $v$ .
33. Дан граф. После подсчета за  $O(E + V \log V)$  нужно за  $O(\log V)$  отвечать на запросы: для данных вершин  $u$  и  $v$ , сколько есть вершин, по которым мы обязательно пройдем, если будем идти из  $u$  в  $v$ .
34. Дан граф, на каждом ребре написано число. После подсчета за  $O(E + V \log V)$  нужно за  $O(\log V)$  отвечать на запросы: для данных вершин  $u$  и  $v$ , какое максимальное число можно встретить на реберно простом пути из  $u$  в  $v$ .
35. Дан граф, на каждой вершине написано число. После подсчета за  $O(E + V \log V)$  нужно за  $O(\log V)$  отвечать на запросы: для данных вершин  $u$  и  $v$ , какое максимальное число можно встретить на вершинно простом пути из  $u$  в  $v$ .
36. Дан связный граф. Добавьте в него минимальное число ребер, чтобы он стал эйлеровым. а) для неориентированного графа, б) для ориентированного графа.
37. То же самое, но граф не связный.
38. Петя складывает цепочки из слов, где каждое следующее слово начинается на ту же букву, на которую закончилось предыдущее. Задан словарь. Можно ли собрать цепочку, используя все слова из него по одному разу?
39. Дан ориентированный граф. Найдите в нем реберно простой цикл нечетной длины.
40. Дан ориентированный граф. Построить минимальное количество реберно простых путей, так чтобы каждое ребро было ровно в одном пути.
41. Дан неориентированный граф, в котором  $2k$  вершин нечетной степени. Разбейте эти вершины на  $k$  пар и соедините вершины в каждой паре путем так, чтобы полученные пути не имели общих ребер.
42. Требуется построить минимальную по длине бинарную строку  $s$ , которая содержит как подстроки (подотрезки) все возможные бинарные строки длины  $l$ . Асимптотика  $O(2^l \cdot l)$ .

## 4 Неделя 4

43. Если граф является ациклическим, то дерево доминаторов можно построить следующим образом. Выделим любое дерево обхода. Рассмотрим все ребра  $(u_i, v)$ . Найдем LCA всех  $u_i$  в дереве обхода. Это будет  $dom(v)$ . Докажите корректность этого алгоритма.
44. Неориентированный граф называется реберным кактусом, если каждое ребро содержится не более чем в одном простом цикле. Проверить, что данный граф является реберным кактусом. Время  $O(m)$ .
45. Неориентированный граф называется вершинным кактусом, если каждая вершина содержится не более чем в одном простом цикле. Проверить, что данный граф является вершинным кактусом. Время  $O(m)$ .
46. Дан вершинный кактус, нужно быстро отвечать на запросы вида: найти число различных реберно простых путей из  $u$  в  $v$ . Предподсчет  $O(n \log n)$ , запросы за  $O(\log n)$ .
47. Дан реберный кактус. Каждое ребро  $uv$  удаляется с вероятностью  $p_{uv}$ . Найти вероятность того, что граф останется связным после удаления ребер. Время  $O(m)$ .

48. Дан неориентированный граф. Нужно выбрать в нем две вершины, между которыми есть три вершинно непересекающихся пути (кроме концов), или сказать, что это сделать нельзя. Время  $O(m \log n)$ .
49. Дан ориентированный граф. Найти все такие вершины  $v$ , что для любой вершины  $u$  существует путь либо из  $u$  в  $v$ , либо из  $v$  в  $u$ . Время  $O(m \log n)$ .
50. Дан неориентированный граф. Найти все такие ребра, при удалении которых граф становится двудольным. Время  $O(m \log n)$ .
51. Есть  $n$  лампочек, некоторые из которых включены, а некоторые выключены, и  $m$  переключателей. Каждый переключатель меняет состояние какого-то подмножества лампочек, при этом для каждой лампочки есть не более двух переключателей, которые меняют ее состояние. Проверить, можно ли выключить все лампочки. Время  $O(m + n)$ .
52. Есть булева функция в виде 2-КНФ для  $n + m$  переменных. Проверить, что для любых значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  существуют значения  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ , при которых функция выполняется.

## 5 Неделя 5

53. Рассмотрим путь из  $v$  в  $u$ , в котором вес максимального ребра минимален. Покажите, что можно построить путь с таким же максимумом по ребрам минимального остовного дерева.
54. Вам нужно передать с одного компьютера на другой  $n$  файлов. Каждый файл — это битовый вектор размера  $m$ . Файл можно переслать либо просто как последовательность битов, либо как diff с другим файлом, уже пересланным ранее. В первом случае нужно будет передать  $m$  бит, во втором —  $A + B \times d$  бит, где  $d$  — число различающихся битов,  $A$  и  $B$  — некоторые константы. Найдите минимальное число битов, которое нужно передать. Полином от  $n$  и  $m$ .
55. В стране  $n$  городов и  $m$  потенциальных дорог. Однажды в ней решили выбрать и построить  $n - 1$  дорогу из  $m$ , чтобы связать все города. Однако что-то пошло не так, и получилось, что эти  $n - 1$  дорог образуют не дерево, а  $k$  компонент связности. Нужно перестроить  $k - 1$  дорогу (то есть убрать  $k - 1$  и построить другие  $k - 1$ ), так, чтобы получилось дерево. Из всех таких способов нужно выбрать такой, чтобы итоговая суммарная длина дорог была минимальна.
56. Есть  $n$  городов. Можно соединить два города  $v_i$  и  $u_i$  дорогой, потратив  $A \times l_i$  денег. И можно построить в городе аэропорт, потратив  $B$  денег. Нужно за минимальное число денег соединить все города (чтобы от каждого до каждого можно было добраться с помощью дорог и самолетов).
57. Для каждого ребра проверить а) правда ли, что есть минимальное остовное дерево, которое его содержит, б) правда ли, что есть минимальное остовное дерево, которое его не содержит.
58. Найти число способов построить минимальное остовное дерево в данном графе.
59. Дано значение  $d$ , требуется найти минимальное остовное дерево, в котором степень вершины номер 1 не превосходит  $d$ .
60. Пусть в задаче о минимальном остовном дереве добавлено следующее ограничение: для каждой вершины  $v$  задано значение  $d[v]$ . Требуется найти минимальное остовное дерево, в котором степени вершин не превосходят соответствующих значений  $d[v]$ . Покажите, что эта задача не проще, чем задача о нахождении минимального гамильтонова пути (которая, как известно, NP-полна).
61. Дан массив из  $n$  целых чисел  $a_i$ . Рассмотрим полный граф на  $n$  вершинах, вес ребра  $(u, v)$  равен  $a_u \oplus a_v$  (xor). Найдите вес минимального остовного дерева за  $O(n \cdot \text{poly}(\log n))$ .

62. Приведите пример графа, в котором минимальное ориентированное остовное дерево не содержит минимальное ребро графа, и при этом есть какое-то ориентированное остовное дерево, которое его содержит.
63. Приведите пример графа, в котором минимальное ориентированное остовное дерево содержит максимальное ребро графа, и при этом есть какое-то ориентированное остовное дерево, которое его не содержит.
64. Пусть нужно построить минимальное ориентированное остовное дерево, но корень дерева не фиксирован и может быть любой вершиной. Решите эту задачу за то же время, что и задачу с фиксированным корнем.
65. Пусть нужно построить минимальный ориентированный лес (то есть множество ребер в котором нет циклов и в каждую вершину входит не более одного ребра). Как модифицировать алгоритм, чтобы он решал эту задачу?
66. Постройте минимальное ориентированное остовное дерево в ациклическом графе за линейное время.
67. Покажите, что следующий жадный алгоритм (аналог алгоритма Прима) не работает для построения минимального ориентированного остовного дерева: начнем с дерева из одной вершины, на каждой итерации будем добавлять в дерево минимальное ребро, исходящее из вершины дерева, ведущее в вершину не из дерева.

## 6 Неделя 6

68. Дан ориентированный граф. Найдите все ребра, для которых существует кратчайший путь из  $s$  в  $t$ , который через него проходит.
69. Дан ориентированный граф. Найдите минимальное число ребер, которое нужно развернуть, чтобы был путь из  $s$  в  $t$ .
70. Дан ориентированный граф. Разрешается развернуть не более одного ребра, требуется, чтобы расстояние от  $s$  до  $t$  было минимально.
71. Дан ориентированный граф, на каждом ребре которого написана буква. Рассмотрим все кратчайшие (по числу ребер) пути из вершины  $s$  в вершину  $t$ . Для каждого пути выпишем строку из соответствующих букв. Найдите путь, для которого эта строка будет лексикографически минимальной.
72. Калькулятор умеет делать две операции:  $a = (a + 3) \% M$  и  $a = (a * 4) \% M$ . За сколько операций можно получить из числа  $a$  число  $b$ ? Время  $O(M)$ .
73. Есть  $n$  типов монет, номинал каждой не более  $M$ , число монет каждого типа не ограничено. Можно ли набрать сумму  $S$ ? Время  $O(M \cdot n)$  (обратите внимание, что  $S$  может быть большим).
74. Дан граф, веса ребер равны 0 или 1. Найти кратчайший путь. Время  $O(n + m)$ .
75. Дан граф, веса ребер — целые числа от 1 до  $k$ . Найти кратчайший путь. Время  $O(m + n \cdot k)$ . Можно ли еще ускорить?
76. Пусть вес пути — это не сумма весов ребер, а произведение. Модифицируйте алгоритм Дейкстры. Для каких весов он будет работать?
77. Пусть вес пути — это не сумма весов ребер, а максимум. Модифицируйте алгоритм Дейкстры.
78. Пусть вес пути — это минимум из весов ребер. Как найти кратчайший путь?
79. Найти путь с минимальной суммарной длиной, а среди таких — из минимального числа ребер.

80. Приведите пример графа с отрицательными рёбрами, на котором алгоритм Дейкстры работает неверно.
81. Приведите пример графа, на котором алгоритм Дейкстры делает  $\Omega(V^2)$  успешных релаксаций.
82. Индиана Джонс хочет выбраться из лабиринта, который представляет собой граф. Для каждого ребра известно время, за которое его можно пробежать, в одной из вершин находится герой, в какой-то другой — выход. Чтобы было динамичнее, лабиринт постепенно разрушается. Для каждого ребра известно время, в которое он разрушится. Найдите кратчайший путь до выхода или скажите, что все плохо.

## 7 Неделя 7

83. Дан граф, на каждом ребре написано число. За один ход можно пройти несколько ребер, сумма чисел на которых не превышает  $D$ . Дойти от  $s$  до  $t$  за минимальное число ходов.  $O(E \log V)$ .
84. Есть сеть железных дорог, про каждую известно, сколько можно получить денег, если сдать ее на металлалом, нужно получить как можно больше, но чтобы города 1 и 2 были связаны.
85. Петя перепутал и написал алгоритм Флойда так:  
`for i: for j: for k: d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]).`  
Постройте тест, на котором получившийся алгоритм работает неверно.
86. Как найти все вершины, вес пути до которых может быть сколь угодно малым?
87. Модифицируйте алгоритм Флойда, чтобы найти в графе отрицательный цикл.
88. Приведите пример графа, на котором алгоритм Форда–Беллмана делает  $\Omega(V^3)$  успешных релаксаций.
89. Дан взвешенный неориентированный связанный граф,  $E - V \leq 20$ . Вам нужно отвечать на запросы: найти кратчайшее расстояние между двумя заданными вершинами. Предподсчет за  $O(E \log V)$ , ответ на запрос за  $O(1)$ .
90. Модифицировать алгоритм Дейкстры, чтобы он работал за  $O(M + E)$ , если все кратчайшие пути не больше  $M$ .
91. Дан граф, изначально веса ребер равны нулю. Есть операция: заданному множеству ребер увеличить вес на 1. Нужно после каждого изменения пересчитать расстояния от  $s$  до всех вершин за  $O(V + E)$ .
92. Дан взвешенный граф. Удалить максимальное число ребер, при условии что расстояние от  $s$  до  $t$  должно быть не больше  $d$ .
93. Дано взвешенное дерево. Найдите расстояние между каждой парой вершин. Время  $O(n^2)$ .
94. Сеть дорог представляет собой взвешенное дерево. В каждом городе продаются машины, в городе  $i$  можно купить машину, которая едет со скоростью  $v_i$ . За какое минимальное время можно доехать из города А в город В? Время  $O(n^2)$ .
95. Есть  $n$  планет и  $m$  телепортов. С помощью телепорта  $i$  можно попасть с планеты  $v_i$  на любую из планет с номерами от  $l_i$  до  $r_i$ . Найти кратчайший путь от планеты 1 до планеты  $n$ . Время  $O((n + m) \log n)$ .
96. Дан взвешенный неориентированный граф, веса ребер неотрицательные. Выделены три вершины. Выбрать подграф минимального веса, в котором эти вершины лежат в одной компоненте связности. Время  $O(E \log V)$ .
97. То же задание для четырех выделенных вершин. Время  $O(E \log V)$ .

98. Можно ли построить такой ориентированный граф, в котором одно и то же ребро лежит как на кратчайшем пути из  $v$  в  $u$ , так и на кратчайшем пути из  $u$  в  $v$ ?
99. Дана матрица кратчайших расстояний между всеми парами вершин. Построить граф, которому она соответствует или сказать, что такого не существует.
100. Петя и Вася играют в игру. Дан граф, в котором выделена вершина  $s$ . Петя выбирает вершину  $t$  и строит какой-то реберно-простой путь из  $s$  в  $t$ . После этого Вася должен построить еще один реберно-простой путь из  $s$  в  $t$ , не пересекающийся по ребрам с путем Пети. Если он сможет это сделать, он выиграл, если нет — то выиграл Петя. Кто выиграет при правильной игре? (подсказка: посмотрите, кто выигрывает если граф Эйлера)
101. Дано  $n$  чисел  $x_i$ . Постройте ориентированный ациклический граф из  $n$  вершин, в котором из вершины  $i$  достижимо ровно  $x_i$  вершин (или скажите, что такого нет).

## 8 Неделя 8

102. Пусть есть две обычные игры на графе, но, в отличие от обычной суммы игр, на каждом ходу игрок делает ход в каждой из игр. Если хотя бы в одной фишка в тупике, то игрок проигрывает. Кто выиграет при правильной игре? Время  $O(n + m)$ .
103. Рассмотрим обычную игру на графе, но первый игрок хочет, чтобы игра закончилась (при этом ему не важно, кто выиграет), а второй — чтобы длилась вечно. Кто добьется своего?
104. Рассмотрим обычную игру на графе, но каждый игрок торопится домой, поэтому если у него нет возможности выиграть, то он хочет проиграть (а не ходить бесконечно по циклу). Что не так в этой игре?
105. Пусть первый игрок торопится домой, как в предыдущей задаче, а второй — наоборот, хочет, если возможно, ходить вечно по циклу, а если нельзя, то выиграть (завести противника в тупик). Эта игра лучше предыдущей? Как узнать результат такой игры?
106. Рассмотрим асимметричные игры на графе (ребра двух цветов, первый ходит только по первым, второй только по вторым). Пусть мы хотим проанализировать сумму двух таких игр. Почему нельзя просто свести каждую из игр по отдельности к обычным играм и использовать функцию Гранди на полученных играх?
107. Рассмотрим игру в поддавки (когда игрок выигрывает в тупике). Пусть мы хотим проанализировать сумму двух таких игр. Почему нельзя просто свести каждую из игр по отдельности к обычным играм и использовать функцию Гранди на полученных играх?
108. Есть полоска из  $n$  клеток. Игроки по очереди делают ходы. Ход заключается в том, чтобы поставить доминошку на две соседние свободные клетки. Если игрок не может поставить доминошку, он проигрывает. Кто выиграет? Время  $O(n^2)$ .
109. Есть полоска из  $n$  клеток. Игроки по очереди делают ходы. Ход заключается в том, чтобы поставить фишку на свободную клетку. При этом нельзя ставить фишку на клетку, если в соседней с ней уже стоит фишка. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выиграет? Время  $O(n^2)$ .
110. Есть полоска из  $n$  клеток. Игроки по очереди делают ходы. Ход заключается в том, чтобы поставить фишку на свободную клетку. Если после хода игрока три фишки стоят подряд, то он выигрывает. Кто выиграет? Время  $O(n^2)$ .
111. У Малыша и Карлсона есть торт, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда, размером  $a \times b \times c$  сантиметров, где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Они играют в следующую игру: Малыш и Карлсон делают ходы по очереди. За один ход игрок может разрезать торт параллельно одной из его граней на две неравные части (длины ребер каждой из частей снова должны

быть целыми), после чего съесть меньшую часть. Тот, кто не может сделать ход, поскольку торт имеет размер  $1 \times 1 \times 1$ , проигрывает. Укажите, как представить игру Малыша и Карлсона в виде прямой суммы трех игр.

112. Дано клетчатое поле, некоторые клетки заблокированы. В одной из свободных клеток стоит фишка. За ход фишку можно переместить в соседнюю по стороне. Нельзя перемещать фишку в клетку, в которой она когда-то уже была. Кто выиграет при правильной игре?
113. Дан массив целых чисел длины  $n$ . А также изначально пустая последовательность. Два игрока ходят по-очереди. На своем ходу игрок может удалить число из начала или из конца массива, и дописать его в конец последовательности. При этом, последовательность всегда должна быть и оставаться строго возрастающей. Тот кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре? Время  $O(n)$ .
114. Дано клетчатое поле  $n \times m$ , а также целое положительное число  $k$ . Изначально все клетки поля белые. Два игрока ходят по-очереди. На своем ходу, игрок может выбрать любой подпрямоугольник поля с площадью  $\leq k$ , состоящий целиком из белых клеток, и покрасить все его клетки в черный. Кто выиграет при правильной игре?

## 9 Неделя 9

### 9.1 Хеши

**В следующих заданиях предположим, что коллизий хеш-функции не бывает (то есть, если хеш-функции строк равны, то можно считать, что строки равны)**

115. Дана строка. Надо отвечать на запросы  $\text{lsp}(i, j)$ : длина наибольшего общего префикса строк  $s[i..n]$  и  $s[j..n]$ .  $O(\log n)$  на запрос.
116. Дана строка. Надо отвечать на запросы: является ли заданная подстрока палиндромом?  $O(\log n)$  на запрос.
117. Дана строка. Надо отвечать на запросы: являются ли две заданные подстроки анаграммами?  $O(\log n)$  на запрос.
118. Число  $p < |s|$  является периодом строки  $s$ , если для любого  $i$   $s[i] = s[i + p]$ . Дана строка. Найти все ее периоды.  $O(n)$ .
119. Даны две строки. Найдите их наибольшую общую подстроку.  $O(n \log n)$ .
120. Дана строка. Найти максимальную по длине строку, которая является ее префиксом, суффиксом, а так же встречается в середине строки.  $O(n \log n)$ .
121. Дана строка. Обработать два вида запросов: 1) изменить один символ 2) проверить что две подстроки равны. Оба запроса за  $O(\log n)$ .

### 9.2 Префикс-функция, КМП

**Задания этого раздела надо решать с помощью префикс-функции**

122. Дана строка. Найти все ее периоды.  $O(n)$ .
123. Дана строка. Найти все ее префиксы, которые являются палиндромами.  $O(n)$ .
124. Дана строка. Для каждого ее префикса посчитайте, сколько раз он встречается в строке как подстрока.  $O(n)$ .
125. Дана строка. Для каждого ее префикса посчитайте, сколько есть строк, которые являются его префиксом и суффиксом.  $O(n)$ .
126. Постройте строку с заданной префикс-функцией.  $O(n)$ .

127. Две последовательности чисел назовем эквивалентными, если одну можно получить из другой добавлением одного числа ко всем элементам (например, последовательности (3, 6, 4) и (7, 10, 8)). Даны массивы  $A$  и  $B$ , найдите в массиве  $A$  все подмассивы, эквивалентные  $B$ .  $O(n)$ .
128. Две строки назовем эквивалентными, если одну можно получить из другой заменой букв, при которой одинаковые буквы переходят в одинаковые, а разные — в разные (например, строки AVASAVA и TQTETQT являются эквивалентными). Даны строки  $A$  и  $B$ , найдите в строке  $A$  все подстроки, эквивалентные  $B$ .  $O(n)$ .

### 9.3 Z-функция

**Задания этого раздела надо решать с помощью Z-функции**

129. Дана строка. Найти максимальную по длине строку, которая является ее префиксом, суффиксом, а так же встречается в середине строки.  $O(n)$ .
130. Постройте строку с заданной Z-функцией.  $O(n)$ .
131. Постройте Z-функцию по префикс-функции, не восстанавливая строку.  $O(n)$ .
132. Постройте префикс-функцию по Z-функции, не восстанавливая строку.  $O(n)$ .
133. Даны строки  $S$  и  $T$ , найдите в  $S$  подстроки, отличающиеся от  $T$  одной буквой.  $O(n)$ .
134. Дана строка  $S$ . Найдите число суффиксов  $S$ , которые лексикографически меньше  $S$ .  $O(n)$ .
135. Чтобы сжать длинную строку, используется следующий формат: строка  $D(X)$  означает, что строку  $X$  надо повторить  $D$  раз. Такие конструкции могут вкладываться друг в друга, например «3(2(A)2(B))C» разжимается в «AABVAABVAABVC». Для данной строки длины  $n$  найдите самое короткое представление в таком виде. Время  $O(n^3)$ .

## 10 Неделя 10

### 10.1 Бор

136. Дан набор строк  $s_i$ . Отсортировать их в лексикографическом порядке за время  $O(\sum |s_i|)$  (константный алфавит).
137. Дан набор строк  $s_i$ . Найти самую короткую строку, которая не является префиксом никакой из них.
138. Дан набор строк  $s_i$ . Отвечать на запросы: по данным  $(i, j)$  найти длину наибольшего общего префикса строк  $s_i$  и  $s_j$ .
139. Сожмем вершины бора, у которых только один ребенок, разрешив писать на ребрах не только символы, а целые строки. Сколько вершин и ребер будет в таком сжатом боре?
140. Придумайте, как хранить сжатый бор, потратив  $O(n)$  дополнительной памяти (вместо  $O(\sum |s_i|)$ ).

### 10.2 Алгоритм Ахо-Корасик

141. Дан набор строк  $s_i$ . Постройте автомат, принимающий только строки, содержащие хотя бы одну из  $s_i$  как подстроку.  $O(\sum \text{len}(s_i))$ .
142. Дан набор строк  $s_i$ . Постройте автомат, принимающий только строки, содержащие каждую из  $s_i$  как подстроку.  $O(\sum \text{len}(s_i))$ .
143. Дан набор строк  $s_i$ . Проверьте, существует ли строка длины  $n$ , не содержащая ни одну из  $s_i$  как подстроку.  $O(n \cdot \sum \text{len}(s_i))$ .



## 12 Неделя 12

### 12.1 Суффиксное дерево

Да, вы уже где-то видели эти задачи. Но теперь их надо решить с помощью суффиксного дерева.

162. Отвечать на запросы: число вхождений строки  $s$  в  $t$ . Предподсчет за  $O(|t|)$ , ответ за  $O(|s|)$ .
163. Отвечать на запросы: входит ли строка  $s$  в строку  $k \cdot t$  ( $k$  повторений строки  $t$ ). Предподсчет за  $O(|t|)$ , ответ за  $O(|s|)$ .
164. Отвечать на запросы: сколько раз подстрока  $s[l..r]$  встречается в строке  $s$ ? Предподсчет за  $O(|s|)$ , ответ за  $O(\log |s|)$ .
165. Найти число различных подстрок строки  $t$  за  $O(|t|)$ .
166. Посчитать сумму длин всех различных подстрок строки  $t$  за  $O(|t|)$ .
167. Найти лексикографически минимальный циклический сдвиг строки  $t$  за  $O(|t|)$ .
168. Дана строка  $t$ . Найти самую длинную строку, которая встречается в  $t$  не менее  $k$  раз за  $O(|t|)$ .
169. Даны две строки  $t_1$  и  $t_2$ . Найти самую длинную общую подстроку. Время  $O(\sum |t_i|)$ .
170. То же для  $k$  строк.
171. Даны строки  $s$  и  $t$ . Отвечать на запросы  $lcp(i, j)$ : максимальное  $l$ , такое что  $s[i..i+l] = t[j..j+l]$ .
172. Дана строка  $t$ . Найти самую длинную подстроку  $t$ , которая является палиндромом.  $O(|t|)$ .